

1. Біртекті емес толқын теңдеуі

Біртекті емес (сыртқы күш әсер ететін) толқын теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

мұндағы

$u(x, t)$ — ізделінетін функция (толқынның ығысуы),

$a > 0$ — толқын таралу жылдамдығы,

$f(x, t)$ — сыртқы күш немесе әсер етуші функция.

2. Коши есебі (бастапқы шарттар)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

3. Жалпы шешім (Д'Аламбер + Дюамель қағидасы)

Біртекті емес толқын теңдеуінің жалпы шешімі **Дюамель принципі** арқылы табылады.

Ол біртекті теңдеудің шешімі мен сыртқы күштің әсерінен туындайтын қосымша мүшеден тұрады:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

4. Формуланың түсіндірмесі

- Бірінші екі қосылғыш — **біртекті теңдеудің шешімі** (Д'Аламбер формуласы).
- Соңғы қосылғыш — **сыртқы күштің $f(x, t)$ әсерінен пайда болған ерекше шешім** (Дюамель интегралы).

Яғни, шешімнің физикалық мағынасы:

Толқынның жалпы түрі бастапқы ығысу мен жылдамдықтың таралуынан және сыртқы күштің әсерінен пайда болатын қосымша толқындардан құралады.

5. Ерекше жағдайлар

- Егер $f(x, t) = 0$, яғни сыртқы күш болмаса, онда бұл шешім кәдімгі Д'Аламбер формуласымен сәйкес келеді.
- Егер $\varphi(x) = 0$ және $\psi(x) = 0$, онда шешім тек сыртқы әсердің есебінен анықталады:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

1. Берілген теңдеу

Бір айнымалыдағы біртекті толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

бастапқы шарттармен:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

2. Айнымалыларды ауыстыру

Теңдеуді жеңілдету үшін жаңа айнымалылар енгізейік:

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Туынды ережелері бойынша:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial \xi} - a \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

3. Теңдеуді жаңа айнымалыларда жазу

$$u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}), \quad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Осыны теңдеуге қойсақ:

$$a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Қысқартсақ:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

4. Жалпы шешім

$u_{\xi\eta} = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі екі функцияның қосындысы түрінде болады:

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

мұнда F және G — еркін (жеткілікті дәрежеде дифференциалданатын) функциялар.

Көне айнымалыларға қайта оралсақ:

$$u(x, t) = F(x + at) + G(x - at).$$

Бұл — біртекті толқын теңдеуінің жалпы шешімі.

5. Бастапқы шарттарды қолдану

Бастапқы шарттардан:

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = aF'(x) - aG'(x) = \psi(x).$$

Енді осы екі теңдеуден $F(x)$ және $G(x)$ -ты табамыз.

Біріншісін туындылаймыз:

$$aF'(x) - aG'(x) = \psi(x).$$

Екі теңдеуді қосу және азайту арқылы:

$$F'(x) = \frac{1}{2a}\psi(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x), \quad G'(x) = -\frac{1}{2a}\psi(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x).$$

Интегралдаймыз:

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds, \quad G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds.$$

6. Жалпы шешім (Д'Аламбер формуласы)

Енді $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ өрнегіне қоямыз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Бұл — Д'Аламбер формуласы, яғни толқын теңдеуінің Коши есебінің нақты шешімі.

7. Физикалық мағынасы

- $\varphi(x + at)$ — солға қарай тарайтын толқын,
- $\varphi(x - at)$ — оңға қарай тарайтын толқын,
- интегралдық бөлік — бастапқы жылдамдықтың әсерінен пайда болған толқын.

1. Біртекті емес толқын теңдеуі

Біртекті емес (сыртқы күш әсер ететін) толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

бастапқы шарттармен:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Мақсат — осы Коши есебінің шешімін табу.

2. Негізгі идея

Дюамель қағидасы былай дейді:

Біртекті емес теңдеудің шешімін біртекті теңдеудің шешімдері арқылы құруға болады.

Яғни, сыртқы күш $f(x, t)$ үздіксіз әсер етеді деп қарастырмаймыз,

керісінше оны **уақыт бойынша бөлшектеп, бір мезеттік соққылардың жиынтығы** ретінде елестетеміз.

3. Біртекті теңдеудің шешімі

Біртекті теңдеу ($f = 0$) үшін Д'Аламбер формуласы белгілі:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

4. Нөлдік бастапқы шарттармен ерекше шешім

Енді жаңа функция $w(x, t)$ алайық, ол келесі теңдеуді қанағаттандырсын:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x, t), \quad w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0.$$

Яғни, бастапқыда тыныш күйде тұрған жүйеге тек сыртқы күш әсер етеді.

Осы $w(x, t)$ — біз іздейтін **ерекше шешім** (particular solution).

5. Дюамель принципі (идеясы)

Егер $f(x, t)$ тек бір мезетте ($t = \tau$) әсер етсе, онда жүйенің жауабы біртекті теңдеудің бастапқы жылдамдығы бар шешімі түрінде болады.

Мысалы, $t = \tau$ кезінде бастапқы жылдамдық ретінде

$$\psi(x) = f(x, \tau) d\tau$$

берілсе, оған сәйкес шешім Д'Аламбер формуласынан:

$$du(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

6. Барлық уақыт аралығы үшін интегралдау

Сыртқы күш әрбір уақыт мезетінде әсер ететін болғандықтан, барлық τ үшін интегралдап қосамыз:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Бұл — Дюамель интегралы деп аталады.

Ол сыртқы күштің уақыт бойынша жиынтық әсерін сипаттайды.

7. Жалпы шешім

Біртекті және біртекті емес бөліктерді қосамыз:

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi}_{\text{біртекті шешім (Д'Аламбер)}} + \underbrace{\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau}_{\text{ерекше шешім (Дюамель)}}.$$

8. Қағиданың физикалық мағынасы

- Бірінші бөлік — бастапқы пішін мен жылдамдықтың әсерінен тарайтын толқындар;
- Екінші бөлік — уақыт бойынша әсер ететін сыртқы күштің жинақталған әсері;
- Бұл принцип суперпозицияға негізделген: әрбір мезеттік әсер жеке толқын тудырады, ал олардың қосындысы жалпы шешімді береді.

Мәселе (мысал)

Теңдеуді қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

бастапқы шарттар

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Мысал үшін $f(x, t) = \sin x e^{-t}$. Біз бұл жағдайда Коши есебінің жалпы шешімін шығарамыз.

1-қадам. Шешімді суперпозиция ретінде жазу

Жалпы:

$$u(x, t) = u_h(x, t) + w(x, t),$$

мұндағы u_h — біртекті ($f = 0$) теңдеудің Д'Аламбер бойынша шешімі, ал w — нөлдік бастапқы шартпен біртекті емес теңдеудің ерешеше (particular) шешімі.

2-қадам. Біртекті бөліктің (Д'Аламбер) шешімі

Д'Аламбер формуласымен:

$$u_h(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

(Бұл — стандартты нәтиже, қысқаша алынған: $u_h = F(x + at) + G(x - at)$ және F, G -ны бастапқы шарттардан табу.)

3-қадам. Ерекше шешімді Дюамель қағидасы бойынша жазу

Нөлдік бастапқы шарттармен ($w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0$) w мына формуламен беріледі:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Біздің $f(\xi, \tau) = \sin \xi e^{-\tau}$. Солайша ішкі интегралды есептейік.

4-қадам. Ішкі интегралды есептеу

Ең алдымен

$$I(\tau) = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sin \xi \, d\xi.$$

Есептейміз:

$$I(\tau) = [-\cos \xi]_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} = -\cos(x+a(t-\tau)) + \cos(x-a(t-\tau)).$$

П trigonometric формуласы арқылы қысқартсақ:

$$I(\tau) = 2 \sin x \sin(a(t-\tau)).$$

(Ескерту: қолданылған формула: $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$, мұнда $\frac{A+B}{2} = x$, $\frac{A-B}{2} = a(t-\tau)$.)

5-қадам. Дюамель интегралына қою

Осыны w -қа қойсақ:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t e^{-\tau} I(\tau) \, d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t e^{-\tau} 2 \sin x \sin(a(t-\tau)) \, d\tau.$$

Яғни

$$w(x, t) = \frac{\sin x}{a} \int_0^t e^{-\tau} \sin(a(t-\tau)) \, d\tau.$$

6-қадам. Уақыттағы ауысым және интегралды есептеу

Ыңғайлы ауыстырайық: $s = t - \tau$. Сонда $d\tau = -ds$, шектер: $\tau = 0 \Rightarrow s = t$, $\tau = t \Rightarrow s = 0$.

Сондықтан

$$\int_0^t e^{-\tau} \sin(a(t-\tau)) \, d\tau = e^{-t} \int_0^t e^s \sin(as) \, ds.$$

Енді интегралды табамыз:

$$J(t) = \int_0^t e^s \sin(as) \, ds.$$

Стандартты интеграл нәтижесі:

$$\int e^s \sin(as) \, ds = \frac{e^s (\sin(as) - a \cos(as))}{1 + a^2} + C.$$

Сондықтан

$$J(t) = \frac{e^t (\sin(at) - a \cos(at)) - (0 - a \cdot 1)}{1 + a^2} = \frac{e^t (\sin(at) - a \cos(at)) + a}{1 + a^2}.$$

Осыдан

$$\int_0^t e^{-\tau} \sin(a(t-\tau)) \, d\tau = e^{-t} J(t) = \frac{\sin(at) - a \cos(at) + ae^{-t}}{1 + a^2}.$$

7-қадам. Ерекше шешімді соңғы түрге айналдыру

Олай болса

$$w(x, t) = \frac{\sin x}{a} \cdot \frac{\sin(at) - a \cos(at) + ae^{-t}}{1 + a^2}.$$

Жинап жазсақ:

$$w(x, t) = \sin x \cdot \frac{\sin(at) - a \cos(at) + ae^{-t}}{a(1 + a^2)}.$$

(Бұл — $f(x, t) = \sin x e^{-t}$ болған кездегі Дюамель арқылы алынған нақты ерешеше шешім.)

8-қадам. Жалпы шешім

Енді толық шешімді жазайық:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \sin x \cdot \frac{\sin(at) - a \cos(at) + ae^{-t}}{a(1 + a^2)}.$$

Бірінші екі мүшесі — бастапқы деректерден туатын Д'Аламбер (еркін) шешім, соңғы қосылғыш — сыртқы күш f -тің ($\sin x e^{-t}$) әсерінен пайда болатын ерешеше шешім.